GEOMETRIA DIFERENCIAL - FICHA 9

JOÃO PEDRO MARTINS DOS SANTOS

1.

(a)
Como $\mathbb{P}^1$ é difeomorfa a $\mathbb{S}^1$ e $H^k(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ se $k \in \{0,1\}$ e $H^k(\mathbb{S}^1) = 0$ caso contrário, então $H^k(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{R}$ se $k \in \{0,1\}$ e $H^k(\mathbb{P}^1) = 0$ caso contrário.
Considere-se agora $d > 1$. Como $\mathbb{P}^d$ é conexo, então $H^0(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{R}$, e como $\dim \mathbb{P}^d = d$, então $H^k(\mathbb{P}^d) = 0$ para $k > d$. Se d é par, então $\mathbb{P}^d$ é uma variedade não orientável de dimensão d, logo $H^d(\mathbb{P}^d) = 0$. Se d é ímpar, então $\mathbb{P}^d$ é uma variedade compacta, conexa e orientável de dimensão d, logo $H^d(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{R}$.
Identifique-se $\mathbb{P}^d \simeq \mathbb{S}^d/\sim$, onde $\sim$ é a relação de equivalência em $\mathbb{S}^d$ tal que $x \sim y$ se e só se $x = y$ ou $x = -y$. Sejam $U = \{[(x_0, \cdots, x_d)] \in \mathbb{P}^d : x_d \neq 0\}$ e $V = \mathbb{P}^d \setminus \{p\}$, onde $p = [(0, \cdots, 0, 1)]$. Então U e V são abertos em $\mathbb{P}^d$ tais que $U \cup V = \mathbb{P}^d$. Como U contrai-se em p, então $H^k(U) = H^k(\{p\})$ para $k \geq 0$, logo $H^0(U) \simeq \mathbb{R}$ e $H^k(U) = 0$ para $k > 0$. Como V retrai-se por deformação em $\{[(x_0, \cdots, x_d)] \in \mathbb{P}^d : x_d = 0\}$, que é difeomorfo a $\mathbb{P}^{d-1}$, então $H^k(V) \simeq H^k(\mathbb{P}^{d-1})$ para $k \geq 0$. Assim, $H^0(U) \oplus H^0(V) \simeq \mathbb{R}^2$ e $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq H^k(\mathbb{P}^{d-1})$ para $k > 0$. Tem-se
$U \cap V = \{[(x_0, \cdots, x_d)] \in \mathbb{P}^d : 0 < |x_d| < 1\}$, logo $U \cap V$ retrai-se por deformação em $\{[(x_0, \cdots, x_d)] \in \mathbb{P}^d : |x_d| = 1/2\}$, que é difeomorfo a $\mathbb{S}^{d-1}$, logo $H^k(U \cap V) = H^k(\mathbb{S}^{d-1})$ para $k \geq 0$, logo $H^k(U \cap V) \simeq \mathbb{R}$ para $k \in \{0, d-1\}$ e $H^k(U \cap V) = 0$ caso contrário.
Para $d = 2$, parte da sucessão de Mayers-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{P}^2$ é:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^2) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^2)$$

Tendo em conta as observações efectuadas anteriormente, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^2) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Como a soma alternada das dimensões dos espaços vectoriais de uma sucessão exacta que começa e termina nos espaços triviais é nula, então conclui-se que $\dim H^1(\mathbb{P}^2) = 0$, ou seja, $H^1(\mathbb{P}^2) = 0$.

Considere-se agora $d > 2$. Parte da sucessão de Mayers-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{P}^d$ é:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V)$$

Como $d > 2$, então $d - 1 > 1$, logo $H^1(U \cap V) = 0$. Tendo em conta as observações efectuadas anteriormente, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^1(\mathbb{P}^{d-1}) \longrightarrow 0$$

Como a soma alternada das dimensões dos espaços vectoriais de uma sucessão exacta que começa e termina nos espaços triviais é nula, então conclui-se que $\dim H^1(\mathbb{P}^d) = \dim H^1(\mathbb{P}^{d-1})$, ou seja, $H^1(\mathbb{P}^d) \simeq H^1(\mathbb{P}^{d-1})$ para $d > 2$. Por indução conclui-se que $H^1(\mathbb{P}^d) \simeq H^1(\mathbb{P}^2) = 0$.

Seja k tal que $1 < k < d - 1$. Parte da sucessão de Mayers-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{P}^d$ é:

$$H^{k-1}(U \cap V) \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V)$$

Como $1 < k < d - 1$, então $0 < k - 1 < k < d - 1$, logo $H^{k-1}(U \cap V) = 0$ e $H^k(U \cap V) = 0$, e como $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq H^k(\mathbb{P}^{d-1})$ para $k \geq 0$, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^k(\mathbb{P}^{d-1}) \longrightarrow 0$$

Assim, $H^k(\mathbb{P}^d) \simeq H^k(\mathbb{P}^{d-1})$ para $1 < k < d - 1$. Por indução conclui-se que $H^k(\mathbb{P}^d) \simeq H^k(\mathbb{P}^{k+1})$ para $1 < k < d - 1$.

Suponha-se que d é par. Então $H^d(\mathbb{P}^d) = 0$ e $H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}) \simeq \mathbb{R}$. Parte da sucessão de Mayers-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{P}^d$ é:

$$H^{d-2}(U \cap V) \longrightarrow H^{d-1}(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^{d-1}(U) \oplus H^{d-1}(V) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^{d-1}(U \cap V) \longrightarrow H^d(\mathbb{P}^d)$$

Tendo em conta as observações efectuadas anteriormente, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(\mathbb{P}^d) \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Assim, $H^{d-1}(\mathbb{P}^d) = 0$.

Suponha-se que d é ímpar. Então $H^d(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{R}$ e $H^{d-1}(\mathbb{P}^{d-1}) = 0$. Parte da sucessão de Mayers-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{P}^d$ é:

$$H^{d-2}(U \cap V) \longrightarrow H^{d-1}(\mathbb{P}^d) \longrightarrow H^{d-1}(U) \oplus H^{d-1}(V)$$

Tendo em conta as observações efectuadas anteriormente, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow H^{d-1}(\mathbb{P}^d) \longrightarrow 0$$

Assim, $H^{d-1}(\mathbb{P}^d) = 0$.

Como $H^{d-1}(\mathbb{P}^d) = 0$ para qualquer $d > 2$, então $H^k(\mathbb{P}^d) \simeq H^k(\mathbb{P}^{k+1}) = 0$ para $1 < k < d - 1$.

Conclui-se assim que se d é ímpar, então $H^k(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{R}$ se $k \in \{0, d\}$ e $H^k(\mathbb{P}^d) = 0$ caso contrário e, se d é par, então $H^0(\mathbb{P}^d) \simeq \mathbb{R}$ e $H^k(\mathbb{P}^d) = 0$ para $k > 0$.

(b)
Identifique-se $\mathbb{T}^2 \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Fixe-se dois pontos distintos $p, q \in \mathbb{S}^1$. Sejam $U = \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \setminus \{p\})$ e $V = \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \setminus \{q\})$. Então U e V são abertos em $\mathbb{T}^2$ tais que $\mathbb{T}^2 = U \cup V$. Como $\mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$ contrai-se em q, então U retrai-se por deformação em $\mathbb{S}^1 \times \{q\}$, que é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$, logo $H^k(U) \simeq H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$. Analogamente, $H^k(V) \simeq H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$, logo $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq H^k(\mathbb{S}^1) \oplus H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$, logo $H^k(U) \oplus H^k(V) \simeq \mathbb{R}^2$ se $k \in \{0,1\}$ e $H^k(U) \oplus H^k(V) = 0$ caso contrário. Tem-se $U \cap V = \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\})$. Sejam C e C' as duas componentes conexas de $\mathbb{S}^1 \setminus \{p, q\}$. Então as componentes conexas de $U \cap V$ são $\mathbb{S}^1 \times C$ e $\mathbb{S}^1 \times C'$, logo $H^k(U \cap V) \simeq H^k(\mathbb{S}^1 \times C) \oplus H^k(\mathbb{S}^1 \times C')$. Seja $r \in C$. Como C é difeomorfa a um intervalo aberto e $r \in C$, então C contrai-se em r, logo $\mathbb{S}^1 \times C$ retrai-se por deformação em $\mathbb{S}^1 \times \{r\}$, que é difeomorfo a $\mathbb{S}^1$, logo $H^k(\mathbb{S}^1 \times C) \simeq H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$. Analogamente, $H^k(\mathbb{S}^1 \times C') \simeq H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$, logo $H^k(U \cap V) \simeq H^k(\mathbb{S}^1) \oplus H^k(\mathbb{S}^1)$ para $k \geq 0$, logo $H^k(U \cap V) \simeq \mathbb{R}^2$ se $k \in \{0,1\}$ e $H^k(U \cap V) = 0$ caso contrário. Parte da sucessão de Mayer-Vietoris associada à cobertura $\{U, V\}$ de $\mathbb{T}^2$ é:

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \longrightarrow H^2(\mathbb{T}^2) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V)$$

Como $\mathbb{T}^2$ é uma variedade compacta, conexa e orientável, então $H^0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}$ e $H^2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}$. Tendo em conta as restantes observações efectuadas, a sucessão exacta fica:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(\mathbb{T}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Como a soma alternada das dimensões dos espaços vectoriais de uma sucessão exacta que começa e termina nos espaços triviais é nula, então conclui-se que $\dim H^1(\mathbb{T}^2) = 2$, ou seja, $H^1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}^2$.
Como $\dim \mathbb{T}^2 = 2$, então $H^k(\mathbb{T}^2) = 0$ para $k > 2$.
Conclui-se que $H^0(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}$, $H^1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}^2$, $H^2(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{R}$ e $H^k(\mathbb{T}^2) = 0$ para $k > 2$.

2.

(a)
Suponha-se que Φ não tem pontos fixos. Seja $H : \mathbb{S}^d \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^d$ dada por $H(p,t) = \dfrac{(1-t)\Phi(p) - tp}{\|(1-t)\Phi(p) - tp\|}$ para $(p,t) \in \mathbb{S}^d \times [0,1]$. Suponha-se que existe $(p,t) \in \mathbb{S}^d \times [0,1]$ tal que $(1-t)\Phi(p) - tp = 0$. Então $(1-t)\Phi(p) = tp$, logo $\|(1-t)\Phi(p)\| = \|tp\|$, ou seja, $(1-t)\|\Phi(p)\| = t\|p\|$, e como $\|\Phi(p)\| = \|p\| = 1$, então $1-t = t$, ou seja, $t = 1/2$. De $t = 1/2$ e $(1-t)\Phi(p) = tp$ vem $\Phi(p) = p$, o que contradiz a hipótese de Φ não ter pontos fixos. Assim, $(1-t)\Phi(p) - tp \neq 0$ para qualquer $(p,t) \in \mathbb{S}^d \times [0,1]$, logo H está bem definida e é uma aplicação diferenciável. Para $p \in \mathbb{S}^d$ tem-se $H(p,0) = \Phi(p)$ e $H(p,1) = -p$, logo H é uma homotopia entre Φ e a aplicação antipodal.

(b)
Seja $f : \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ a aplicação antipodal em $\mathbb{S}^d$, seja $F : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^{d+1}$ dada por $F(x) = -x$ para $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ e seja $i : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ a inclusão de $\mathbb{S}^d$ em $\mathbb{R}^{d+1}$. Então $F \circ i = i \circ f$.

Sendo $\omega \in \Omega^d(\mathbb{R}^{d+1})$ dada por $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^{d+1}$, tem-se que $i^*\omega \in \Omega^d(\mathbb{S}^d)$ é uma forma de volume.

Como $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^{d+1}$ e d é par, então

$$F^*\omega = \sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}(-x^i)d(-x^1) \wedge \cdots \wedge \widehat{d(-x^i)} \wedge \cdots d(-x^{d+1}) =$$

$$= (-1)^{d+1}\sum_{i=1}^{d+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots dx^{d+1} = (-1)^{d+1}\omega = -\omega,$$ logo
$f^*(i^*\omega) = (i \circ f)^*\omega = (F \circ i)^*\omega = i^*(F^*\omega) = i^*(-\omega) = -i^*\omega$, e como $i^*\omega \in \Omega^d(\mathbb{S}^d)$ é uma forma de volume, então $\deg f = -1$.
Como Φ preserva orientações, então $\deg \Phi = 1$, e como $\deg f = -1$, então Φ e f têm graus diferentes, logo não podem ser homotópicas, logo, de acordo com o resultado de (a), Φ tem pelo menos um ponto fixo.